Nuove geometrie, nuovi spazi: La discussione sull'origine della geometria all'inizio del XX secolo e le sue ricadute sull'insegnamento

New geometries, new spaces: The discussion about the origin of the geometry at the beginning of the XX century and its impact on teaching

Giorgio Bolondi
Facoltà di Scienze della Formazione, Libera Università di Bolzano

Abstract. *In this contribution we reconstruct the discussion, that developed from the end of the XIX and the beginning of the XX century, regarding the meaning of the axioms in geometry. In such a discussion, psychological and cognitive considerations played a relevant role. The actors involved in the debate recognized their clear educational implications. In this perspective, the historical case we are analyzing can also help to frame the always significant relationship between mathematics education and the other disciplines that support it in the understanding of teaching and learning processes.*

Keywords: learning of geometry, axioms, Enriques.

Sunto. *In questo contributo viene ricostruita la discussione che si è sviluppata tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo sul significato della scelta degli assiomi della geometria. In questa discussione ebbero un ruolo rilevante considerazioni di natura psicologica e cognitiva, le cui implicazioni didattiche erano evidenti agli attori del dibattito. In questa prospettiva, questo caso storico può aiutare anche a inquadrare la relazione sempre attuale tra la didattica della matematica e le altre discipline che la supportano nel comprendere i processi insegnamento e apprendimento.*

Parole chiave: apprendimento della geometria, assiomi, Enriques.

Resumen. *En esta contribución se reconstruye la discusión que se dio a finales del siglo XIX e inicio del siglo XX acerca del significado de la elección de los axiomas de la geometría. En esta discusión tuvieron un papel de relevante importancia consideraciones de naturaleza psicológica y cognitiva, cuyas implicaciones didácticas eran evidentes para los actores del debate. En esta perspectiva, este evento histórico puede ayudar también a enmarcar las relaciones, siempre actuales, entre la didáctica de la matemática y de las otras disciplinas que la suportan en comprender los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la misma.*

Palabras clave: aprendizaje de la geometría, axiomas, Enriques.

1. Introduzione

All'inizio del secolo scorso si sviluppò un'animata controversia all'interno della comunità dei matematici sulle radici psicologiche delle nozioni geometriche e sulla strutturazione geometrica della nostra percezione del mondo, con un interesse particolare per i concetti primitivi e gli assiomi (dovuto al clamore che negli stessi anni si sviluppava attorno al dibattito sui fondamenti, e alla diffusione – anche al di fuori della cerchia dei matematici militanti – delle discussioni sulla ancora abbastanza recente rivoluzione "non-euclidea"). Di fatto, questa discussione può ben essere vista come un momento particolare del perenne dibattito filosofico sulla natura e la struttura dello spazio, dibattito cui la "riflessione geometrica" (in tutti i suoi aspetti, anche quelli più tecnici) è spesso stata intrecciata. Si trattò di un dibattito tipicamente "cognitivo" (*ante litteram*), e l'aspetto più interessante dal nostro punto di vista è che ebbe influenze molto importanti, anche a lungo termine, sull'insegnamento della matematica. Si può forse dire che è stato il primo caso nella storia in cui, in maniera massiccia, una comunità di scienziati si è occupata dell'insegnamento e della trasmissione della propria disciplina partendo esplicitamente da quelli che noi oggi chiameremmo (col gergo degli esperti di didattica) "processi cognitivi".

Non che non fosse mai avvenuto, ma era sempre stato fatto dai filosofi, dai pedagogisti, non dai "professionisti" della disciplina. A partire da allora la matematica ha iniziato (molto prima della fisica, della biologia, della chimica, …) a sviluppare sistematicamente una didattica tipicamente disciplinare, anche perché già allora i matematici erano coscienti che la loro era la disciplina che registra il maggior numero di "fallimenti formativi".

Nella seconda metà dell'Ottocento ci fu una rivoluzione nella comprensione scientifica dei meccanismi della percezione spaziale. I lavori di Helmholtz, Lotze, Wundt, Bain e altri fecero una profonda impressione sul mondo scientifico, ed ebbero una sorprendente vasta diffusione e volgarizzazione. Fu proprio partendo da un lato dai dati presentati da queste ricerche di tipo "psicofisiologico", e dall'altro da considerazioni di stampo strettamente filosofico (dovute alla forte influenza che l'eredità lasciata da Kant aveva ancora su tutto il mondo culturale e scientifico) che i matematici svilupparono la propria discussione. Fu quindi un momento di forte interazione tra discipline diverse, attorno a un tema "forte" come quello della conoscenza spaziale; di lì a poco la scelta formalista avrebbe allontanato, per molti decenni, i matematici da questo tipo di discussioni.

Partiamo da un esempio. Gli psicologi, dalla Gestalt in poi, parlano di una *geometria fenomenologica* e di una *geometria percettiva* diverse da quella euclidea, considerata come lo strumento per la descrizione standard del mondo prossimo a noi, almeno in prima approssimazione. Questa geometria fenomenologica o percettiva si rivela particolarmente nei fenomeni cosiddetti di illusione ottica (ma non solo), in cui si hanno "deformazioni" di lunghezza, direzione, proporzioni, ... Quello che succede, in definitiva, è che illusioni del tipo della camera di Ames sono provocate costruendo ambienti in cui alcune componenti che hanno un significato standard nella geometria comunemente usata per interpretare (o strutturare, o tradurre, …) la realtà (parallelismo, perpendicolarità, possibilità del movimento rigido) seguono invece regole di una geometria diversa (che non è più illimitata, né isotropa, né omogenea, ...).

Il matematico militante (per usare un'espressione di moda) sente oggi tutto questo come una faccenda che non lo riguarda (uno "pseudo-problema", per dirla con Bourbaki). È molto significativo che cent'anni fa fosse abbastanza frequente un processo in senso epistemologicamente inverso: i matematici si domandavano quali fenomeni avvenivano e quali sensazioni e percezioni si potevano avere in uno spazio in cui veniva supposta "valida" una geometria diversa da quella euclidea: basti pensare a Helmholtz o Clifford, oppure a certi passaggi di Poincaré (che, tra l'altro, non si limita alle sensazioni visive ma sviluppa anche altri casi, come la percezione della temperatura); Federigo Enriques parla di "riflessioni veramente suggestive, sopra le illusioni cui potrebbe andar soggetto un essere ipotetico il quale si muovesse e sentisse in un diverso ambiente spaziale" (Enriques, 1901, p. 175), e fa risalire a Gauss esempi che sarebbero divenuti letteratura attraverso *Flatland*. Queste costruzioni mostrano un interesse per la validazione non solo logica della teoria, ma più generalmente cognitiva. Sempre Enriques (1906), riprende esplicitamente nei sui lavori, una distinzione sviluppata da Mach (1886), quella tra spazio fisiologico e spazio geometrico. Sarà proprio Enriques la figura chiave in questa fase del dibattito. Rivedendo nella sua interezza il percorso di Enriques, è possibile affermare che la sua conclusione, con l'interesse puntuale per i temi dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica e per la formazione degli insegnanti, è strettamente in continuità con questo dibattito (Bolondi, 2015).

2. Il tema del dibattito

Il dibattito in questione è dunque quello sul problema dei fondamenti della geometria in senso lato, che delimitiamo in un certo senso arbitrariamente, ma coerentemente con la percezione che del problema stesso si ebbe all'epoca, tra la pubblicazione dei *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Pasch (1882) e la stesura di *Het wezen der meetkunde* di Brouwer (1909), data che coincide con la terza edizione dei *Grundlagen der Geometrie* di David Hilbert, in cui si è ormai "stabilizzato" il contenuto geometrico. Questo è un argomento di storiografia e di "filosofia" matematica ben conosciuto; alcuni tra i lavori e i libri su questo soggetto sono oggi considerati pietre miliari della storiografia matematica. Come ha sottolineato Israel (1989), il nostro modo di vedere questo dibattito è tuttora fortemente influenzato dall'approccio assiomatico-bourbakista che è stato dominante nella ricerca e nella storiografia matematica fino a poco tempo fa, e che continua a esercitare una forte attrattiva sul modo di pensare dei matematici. Dalla critica dei fondamenti la geometria è uscita adottando pienamente il paradigma hilbertiano che, partendo dal modello formalista dei *Grundlagen*, è andato poi sviluppandosi fino agli anni ’30, estendendosi a una globale filosofia formalista (si vedano a questo proposito: Toepell, 1986a, 1986b; Freudenthal, 1957). Bourbaki vide poi nel formalismo (rielaborato) lo strumento per realizzare un’economia di pensiero che definiva il *taylorismo della matematica* (Bourbaki, 1948).

3. I precedenti

Come molte storie relative alla geometria, anche questa inizia con Riemann. Il dibattito filosofico sulla natura dello spazio si era alimentato, fino ad allora, principalmente con i contributi della fisica (Jammer, 1961); la geometria era *una*, qualunque fossero le idee del filosofo, ed era *lo* strumento per la descrizione dello spazio. È ben noto come fosse pesante l’autorità di Kant sulla dottrina dello spazio in quei tempi, e quali tendenze antikantiane per converso si sviluppassero in quegli anni. L’*Habilitationsvortrag* di Riemann (1854) era uno scritto con intenti filosofici (Nowak, 1989), scritto principalmente per discutere le concezioni kantiane dello spazio, e la formazione filosofica di Riemann (per sua ammissione) era nell’ambito della filosofia di Herbart, anche se proprio relativamente alla teoria dello spazio Riemann dice di *non* essere influenzato dalla filosofia di Herbart (Scholz, 1982). In esso si parla di *ipotesi* che stanno alla base della geometria e delle conseguenze che queste ipotesi hanno sullo *spazio* che la geometria descrive. Per la prima volta con Riemann, si passa dall’idea di un unico spazio a una categoria di possibili forme spaziali, che dipendono dalle ipotesi di partenza. Si noti che per Gauss stesso il problema centrale delle geometrie non euclidee, una volta ammessa la loro possibilità logica, era di vedere quale fosse *la* geometria dello spazio reale (in questo senso vanno presi i suoi tentativi di misurazione degli angoli dei triangoli geodetici). Quando il lavoro di Riemann fu recepito dai matematici, ci si rese conto che apriva strade completamente nuove sia alla geometria (intesa come disciplina in sé) che alle interazioni della geometria con il lavoro dei filosofi:

> Per quanto alla fine i risultati matematici abbiano trovato lettori in grado di riceverli, nella maggior parte dei casi il lavoro fu apprezzato o criticato per i suoi contenuti filosofici.[1] [Although the mathematical results eventually found perceptive readers, in most cases the work was praised or criticized for its philosophical contents]. (Nowak, 1989, p. 31)

In realtà, per molti anni ebbe un’influenza molto maggiore il lavoro di Helmholtz (1868), in cui le “ipotesi” di Riemann venivano sostituite dai “fatti”

[1] Qui e nel seguito le traduzioni in italiano sono dell’autore.

che potevano venir desunti dall'esperienza, in particolar modo dall'esistenza dei corpi rigidi rispetto al movimento (cosa che spiega la particolare importanza attribuita in quegli anni agli spazi di curvatura costante). Le ipotesi di Riemann venivano quindi dimostrate a partire da un postulato (un "fatto") la cui giustificazione era nell'esperienza. Sui rapporti tra lo scritto di Riemann e il pensiero di Helmholtz esiste un'amplissima letteratura (si veda ad esempio Torretti, 1978). Sui legami con le successive elaborazioni di Lie si veda anche Tazzioli (1994). La relazione tra Riemann, Helmholtz e Lie diventa un argomento standard di controversia nel periodo della costruzione dei fondamenti e riemerge prepotentemente nella discussione tra Russell, Poincaré, Couturat e Lechalas svoltasi negli ultimi anni del secolo. L'argomento era cruciale non solo per il suo contenuto matematico, quanto per la sua valenza filosofica (oggi si direbbe più precisamente "cognitiva"). L'analisi forse più avvincente di questa controversia è stata fatta da Brouwer nella sua tesi di dottorato (Brouwer, 1909), il cui secondo capitolo si conclude con un confronto tra le tesi di Kant, Russell e Brouwer stesso sul rapporto tra geometria ed esperienza. Brouwer si pone tre domande, e confronta le differenti risposte.

Cosa è legato indissolubilmente alla nostra esperienza esterna?

- Per Kant (*Estetica Trascendentale*): lo spazio euclideo tridimensionale e il tempo, privo di misura;
- per Russell: lo spazio euclideo tridimensionale e le coordinate temporali misurabili;
- per Brouwer: nulla.

Cosa appare necessariamente nella ricezione matematica dell'esperienza, in virtù dell'organizzazione dell'intelletto umano?

- Per Kant: lo spazio euclideo tridimensionale e il tempo, privo di misura;
- per Russell: lo spazio proiettivo, il movimento libero nello spazio e le coordinate temporali misurabili;
- per Brouwer: l'intuizione di base della matematica e l'intuizione del tempo.

Cosa appare necessariamente nella ricezione matematica dell'esperienza, in virtù dell'esperienza?

- Per Kant: nulla;
- per Russell: la tridimensionalità dello spazio e l'assioma delle parallele;
- per Brouwer: nulla.

Nella tesi di Brouwer è anche discusso il punto di vista formalista di Hilbert, ed è principalmente in contrapposizione ad esso che prende forma e visibilità la posizione "intuizionista" di Brouwer:

> La più intransigente conclusione dei metodi che noi attacchiamo, che illustra con maggiore evidenza la loro inadeguatezza, è stata tratta da Hilbert. [The most uncompromising conclusion of the methods we attack, which illustrates most

> lucidly their inadequacy, has been drawn by Hilbert]. (Brouwer, 1909/1975, p. 92)

È per questo che fissiamo come termine conclusivo del dibattito sulla fondazione della geometria lo scritto di Brouwer: il formalismo si è definitivamente affermato (le residue precisazioni di Enriques stesso ne prendono atto) come l'*essenza* della geometria; la posizione quasi isolata di Brouwer inaugura un filone – esiguo numericamente ma molto combattivo – completamente nuovo.

4. L'ambiente del dibattito

Già questi accenni fanno capire che nel periodo sotto esame ci fu realmente una notevole discussione, sia in qualità che in quantità. Una prima (approssimativa) lista comprende almeno 150 articoli o libri sui fondamenti della geometria apparsi tra il 1882 e il 1909, comprendenti: lavori di costruzione assiomatica della geometria elementare, proiettiva, …; discussioni sul significato e le implicazioni di un dato postulato o di una data nozione elementare; lavori filosofici sui legami tra i principi della geometria e l'esperienza, il mondo fisico, la psicologia; ... Oggi si scrive e si pubblica molto di più; però è difficile immaginare un argomento di forte valenza filosofica che stimoli continuamente pubblicazioni da parte di matematici del calibro di Poincaré, Enriques, Klein, Brouwer, Russell, Hilbert, ... con ricadute importanti sulla matematica (in senso stretto).

In questa produzione, naturalmente, abbiamo contributi di natura molto diversa: si va dallo studio delle radici empiriche della geometria, alla verifica fisica dei risultati della geometria, alla costruzione assiomatica della geometria elementare, o proiettiva, o di quella che veniva chiamata "geometria generale", alla definizione dell'uso degli strumenti logici, all'analisi psicologica delle nozioni geometriche (concetti o postulati). Le interazioni di questo dibattito furono le più varie: persino un personaggio come Lenin fu coinvolto e dedicò diverso tempo allo studio di Mach e Poincaré per poter scrivere *Materialismo ed Empiriocriticismo* (Steila, 1996; Bolondi, 2000).

Una particolare caratteristica era quella, tipica della mentalità scientifica dell'epoca, di attingere anche per il problema dei fondamenti della geometria ai dati della ricerca fisiologica. È naturale che questo si trovasse già in Helmholtz: "Le mie ricerche sulle intuizioni spaziali nel campo visivo mi hanno dato occasione di eseguire delle ricerche anche sul problema dell'origine e dell'essenza delle nostre intuizioni dello spazio generalmente considerate" (Helmholtz, 1868; tradotto in Tazzioli, 1994, p. 266). Per sua stessa ammissione, il cammino di Helmholtz è stato dalla medicina alla fisiologia, dalla fisiologia alla fisica e della fisica alla geometria; già Clifford (per certi versi un "visionario" della geometria, per usare un termine di moda oggi) sottolineava come questo itinerario fosse significativo.

Per quanto riguarda l'attenzione e i legami tra il problema dei fondamenti e la psicologia, può essere interessante per capire l'atteggiamento dell'epoca, quanto scrive Vailati (allievo di Peano) nel 1896, riferendo del III congresso internazionale di psicologia:

> Un'altra classe di lacune [nel congresso di Psicologia] non meno da deplorare è l'assenza quasi completa di studi che si riferiscano alle applicazioni recenti della psicologia alla critica e alla determinazione dei concetti fondamentali della scienza moderna. (...) Non mi sembrano, per esempio, questioni di poca importanza quelle che trattano (...) dell'origine e delle vicende dei concetti di causa, di forza, di materia (...) o della funzione (rôle) delle ipotesi nell'investigazione scientifica (...), oppure lo studio del meccanismo psicologico del ragionamento per deduzione (sillogismo). (Vailati, 1896a/1971, p. 235)

Per quanto riguarda la "psicofisiologia", dobbiamo riferirci soprattutto all'autorità e alla diffusione che in quegli anni aveva l'opera di Wundt. Ad essa fa riferimento esplicitamente e talvolta entusiasticamente, ad esempio, Enriques, come ben rilevano Poggi (1989) e Santucci (1989) (e questo, come vedremo, fu uno dei suoi limiti). Oggi l'importanza di Wundt è stata giustamente drasticamente ridimensionata, ma all'epoca egli era un'autorità assoluta, dotata di enorme potere anche accademico ed editoriale.

> Il suo nome non è legato a nessuna scoperta significativa, a nessuna sua teoria che non si sia rivelata un errore clamoroso, a nessun nuovo problema individuato. Ciononostante, Wundt costituì un importante punto di incontro per la generazione di giovani ricercatori che vedevano nella psicologia sperimentale una nuova strada per la comprensione dell'uomo. [His name is linked to no significant finding, no theory that did not prove to be flagrant error, no problem freshly defined. Yet Wundt constituted an important rallying point for the generation of young men who saw experimental psychology as a new avenue to man's self-understanding]. (Diamond, 1976, p. 421)

La sua psicologia fisiologica era considerata parte della filosofia. Amendola (1906/1971, p. 41), in una lettera a Giovanni Vailati, scrive: "Wundt fa un corso sulla filosofia da Kant ad oggi; molto accurato, ma non mi dà nulla. Lo stesso per il laboratorio di psicologia". Da notare che lo stesso Vailati, in un'altra lettera a Ferrari (Vailati, 1896b/1971, p. 151), così si esprimeva:

> Non ho affatto nessuna conoscenza dei lavori sperimentali di Wundt; quanto alle sue opere filosofiche, quel poco che ne ho letto mi ha tolto affatto il desiderio di leggere il rimanente: è tutto ciò che ci può essere di più oscuro compatibilmente coll'essere superficiale, è tutto ciò che ci può essere di più prolisso compatibilmente (...) col non dir niente.

Wundt stesso peraltro si presentava come *maitre à penser*. Enriques parla con entusiasmo a Guido Castelnuovo del proprio studio della psicologia fisiologica: un entusiasmo più grande di quello provato per qualsiasi altra questione (Castelnuovo, 1947). È chiaro peraltro, da molti passi delle sue opere (specialmente da quelle più mature), che l'idea generale che faceva da sfondo a questi studi e a questi "innamoramenti" era lo sforzo per tenere agganciata la geometria alla realtà.

I rapporti coi filosofi "professionisti" sul problema dei fondamenti della geometria erano abbastanza stretti (se si prescinde dal caso italiano, dove il crescente peso di Croce e Gentile, com'è noto, tendeva a separare drasticamente la speculazione filosofica dalle scienze e quindi andava in direzione contraria agli sforzi di Enriques (Ciliberto, 1982)). Abbiamo già citato la controversia tra Poincaré, Russell, Couturat e Lechalas sul problema di Riemann-Helmholtz-Lie. Non analizzeremo qui in dettaglio la posizione di Poincaré, la più nota e studiata. Ci limitiamo a notare che la maggior parte dei sui scritti sul problema delle radici della geometria sono stati scritti prima del 1900 (e pubblicati principalmente sulla *Revue de Metaphysique et de Morale*, quindi destinati a un pubblico di "accademici professionisti") e poi ripubblicati *dopo* il 1900 in una serie di libri a grandissima diffusione (che circolarono in ambienti molto più ampi, ed ebbero risonanza anche tra il grande pubblico, sia in Francia che altrove). Più in generale, abbiamo il fatto che i matematici tengono sempre presente la posizione kantiana, e negli scritti dell'epoca vediamo usare il termine "kantismo" sia come offesa che come affermazione orgogliosa; negli scritti con intenzione più filosofica il riferimento a Kant è obbligatorio e in questo senso l'accusa dei neo-idealisti a Enriques – di non essere andato oltre Kant nello studio della filosofia – può essere estesa a quasi tutti i matematici dell'epoca.

Nell'altra direzione c'è un interesse, una curiosità talvolta ingenua dei filosofi per capire lo sviluppo della geometria e le conseguenze della discussione dei fondamenti sui problemi della conoscenza, spesso limitandosi al dilemma euclideo/non euclideo, e spesso anche per procurarsi materiale per le loro polemiche. Particolarmente interessante è una lettera di Franz Brentano a Giovanni Vailati (Brentano, 1900/1971), in cui espone le sue idee sull'assioma delle parallele. In particolare, Brentano sostiene che esso non è un assioma, perché non è immediatamente evidente e non può essere provato per constatazione diretta; nella discussione oscilla spesso tra un piano puramente storico-filosofico (con l'analisi del concetto di "parallelo" presso i Greci) e uno strettamente matematico, con deduzioni e costruzioni geometriche. La risposta di Vailati è ancora più interessante, perché in essa Vailati spiega a Brentano, in tono quasi didascalico, l'atteggiamento *formale* del geometra, rivendicando però poi il legame della costruzione matematica con la realtà:

> La deduzione anzi può essere un mezzo per mettere alla prova la verità degli assiomi assunti (confrontandone le conseguenze con l'esperienza diretta). A questo riguardo la geometria differisce solo in grado (*not in kind*) dalla fisica, dove si vede ben chiaro che le proposizioni *da cui* si deduce (ipotesi) possono essere (anzi sono ordinariamente) *meno evidenti* di quelle che si deducono da

> esse. (...) Concludendo, alla domanda: quali sono i veri assiomi della geometria? non si può dare, secondo me, una risposta precisa senza rispondere prima a quest'altra domanda*: qual è il miglior modo di ordinare le nostre conoscenze sulle proprietà dello spazio, in modo che esse compaiano come conseguenze d'un numero limitato d'ipotesi fondamentali?* E, dei vari modi in cui questo scopo può essere raggiunto, alcuni possono essere preferibili per certi caratteri, altri per altri (per esempio, alcuni per la grande evidenza delle ipotesi, altri invece per il loro *piccolo numero*). (Il corsivo è dell'autore). (Vailati, 1900/1971, p. 123)

Questo passo è interessante per molti aspetti: prima di tutto, vi troviamo un'eco della posizione di Peano (secondo il quale, com'è noto, il problema della *compatibilità* degli assiomi dell'aritmetica e della geometria era secondario, bastando ad essa una verifica nella pratica matematica dei risultati che venivano dedotti). In secondo luogo, vediamo come la formalizzazione assiomatica venisse vista come un *mezzo per l'organizzazione* della conoscenza, non come l'essenza stessa della materia. Se dobbiamo vedere un senso nelle assiomatizzazioni del senso comune dello spazio, la geometria naïf, come vengono tentate per le applicazioni all'intelligenza artificiale, lo vediamo in questa frase di Vailati. Non molto tempo dopo il dibattito di cui ci occupiamo (peraltro, una prima riorganizzazione empirista degli assiomi della geometria, fondamentalmente in chiave didattica), fu tentata da George David Birkhoff (Birkhoff, 1932; Birkhoff & Beatly, 1940).

A riprova di questo sforzo di individuazione degli assiomi da prospettive diverse, consideriamo anche Pasch. Abbiamo fissato come data di inizio della costruzione dei fondamenti il trattato di Pasch del 1882 perché in esso, per la prima volta, si cerca di enunciare esplicitamente *tutte* le condizioni non dimostrate (leggasi: assiomi) con cui si costruisce la geometria. Prima di allora, infatti, gli assiomi erano, per lo più *non enunciati esplicitamente*, e tale fu sempre, ad esempio, l'atteggiamento di Klein. Pasch, ripreso esplicitamente da Enriques (1911) quando presenta a un largo pubblico anche di insegnanti i risultati del processo di sistemazione della geometria, *definisce* il concetto di "rigore" attraverso le due condizioni:

> 1) Si enunciano esplicitamente i concetti primitivi per mezzo dei quali ci si propone di definire logicamente tutti gli altri.
> 2) Si enunciano esplicitamente le proposizioni fondamentali (postulati) grazie ai quali ci si propone di dimostrare logicamente le altre proposizioni (teoremi).
> Queste proposizioni fondamentali devono apparire come delle pure relazioni logiche tra i concetti primitivi, e questo indipendentemente del significato che si dà a questi concetti primitivi. (Enriques, 1911, p. 19)

L'importanza dell'opera di Pasch sta anche nell'aver dato (e utilizzato) questa definizione di "rigore" in cui fa riferimento al *significato* dei concetti primitivi; definizione che in prima approssimazione, ancora oggi, un *working mathematician* dà quando gli si chiede che cosa sia il rigore formale. La cosa importante da notare (e già la notava Enriques) è che *nella scelta* dei postulati e dei concetti primitivi Pasch si è poi posto da un punto di vista "psicologico" (Enriques, 1911). Come scrive Hans Freudenthal: "Pasch era ansioso di derivare le sue nozioni fondamentali dall'esperienza, e di postulare solo quello che sembrava garantito dall'esperienza. [Pasch was anxious to derive his fundamental notions from experience and to postulate no more than experience seems to grant]" (Freudenthal, 1962, p. 617). Per Pasch, in ultima analisi, la geometria va costruita rigorosamente come un sistema logico, ma la scelta dei postulati ci viene suggerita dall'esperienza. D'altra parte, vale la pena di citare nella stessa direzione un passo di Poincaré relativo alla scelta degli assiomi nei *Grundlagen* di Hilbert:

> Mi dispiace anche che in questa presentazione degli assiomi metrici non resta alcuna traccia di una nozione di cui Helmholtz, per primo, aveva compreso l'importanza: intendo dire, quella di movimento rigido di una figura invariante. Si sarebbe potuto mantenere a questa nozione il suo ruolo naturale, senza sacrificare il carattere logico degli assiomi (…). Si sarebbe quindi potuta evitare l'introduzione artificiale di questo assioma IV, 6, e i postulati sarebbero rimasti legati alla loro vera origine psicologica. [Je regretterai aussi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier, compris l'importance: je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On aurait pu conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes (…). On aurait évité ainsi l'introduction artificielle de cet axiome IV, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique]. (Poincaré, 1902a, p. 253)

Il "ruolo naturale" della nozione di movimento rigido è dunque quello di essere un postulato. E questo ruolo naturale, seguendo Helmholtz, gli deriva dall'essere un "fatto".

Un motivo per questa preoccupazione di Poincaré era sicuramente quello didattico: l'interesse dell'insegnamento della geometria elementare non sta solo nella sua "capacità formativa" verso il ragionamento logico, come caso esemplare e mirabile di edificio teorico logicamente costruito, ma anche nel fatto che è uno strumento per il "quotidiano commercio col mondo". In una conferenza pedagogica, con una delle sue formule fulminanti diceva:

> Ora, per comprendere una teoria, non basta constatare che il percorso seguito non è interrotto da un ostacolo, bisogna anche rendersi conto delle ragioni per cui lo si è scelto. [Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir]. (Poincaré, 1889, p. 163)

Persino Pieri, il più formalista degli allievi di Peano, in quella che è l'esposizione "ufficiale" dell'assiomatizzazione della geometria secondo la scuola italiana, diceva:

> Molti hanno l'abitudine di associare all'idea di punto la rappresentazione spaziale ordinaria. Non si può negare l'importanza euristica, e ancora meno il valore didattico, di una tale interpretazione concreta degli enti geometrici. [Beaucoup

ont l'habitude de joindre à l'idée du point la représentation spatiale ordinaire. On ne nie pas l'importance heuristique, et encore moins la valeur didactique, d'une telle interprétation concrète des êtres géométriques]. (Pieri, 1900, p. 38)

Sulla didattica, Pieri tornerà in più passaggi di questo e altri discorsi, sottolineando come l'assiomatizzazione sia un progresso tecnico ma non esaurisca in sé stesso tutto il fenomeno matematico e, anzi, la scelta del percorso assiomatico da seguire possa anche essere guidata da considerazioni di carattere didattico. Ad esempio, dimostra come le idee primitive su cui costruire la geometria elementare possano essere ridotte a due, e propone quelle di punto e di movimento (ricondotto alla nozione di equidistanza); nota che si potrebbe anche partire dalle nozioni primitive di *punto* e di *omografia*, e alla fine commenta:

Chiunque può vedere quanto poco sia raccomandabile una riforma foriera di così grandi conseguenze, che porterebbe di colpo a fare precedere l'insegnamento della Geometria elementare ordinaria da quello della pura Geometria di posizione. [Mais chacun voit combien peu se recommande une réforme de si grande conséquence, qui conduirait d'emblée à faire précéder l'enseignement de la Géométrie élémentaire ordinaire de celui de la pure Géométrie de position]. (Pieri, 1900, p. 45)

Qui, senza nominarlo, Pieri si riferisce a Klein, che aveva proposto come "naturale" e legato ai fatti dell'esperienza tale cammino didattico-espositivo. Pieri riconduce poi la propria scelta dei primitivi su cui riposa la costruzione di tutto l'edificio a considerazioni di questo carattere. E insiste che:

Nelle scuole, la Geometria elementare non potrà forse mai perdere il carattere di *Fisica dell'estensionalità* che possiede fin dall'antichità più remota. [*Dans les écoles*, la Géométrie élémentaire ne pourra peut-être jamais quitter le caractère d'une *Physique de l'étendue* qu'elle possède depuis l'antiquité la plus reculée]. (Pieri, 1900, p. 46)

Notiamo *en passant* che Pieri esplicitamente dice che non è possibile rinunciare all'idea di *punto* come primitivo, in quanto è *il substrato di ogni concetto geometrico* [*le substratum de tout concept géométrique*]. Questa opinione è condivisa praticamente da tutti, anche da chi, come Poincaré, sta lavorando a sviluppi radicalmente nuovi – qualitativi – della scienza dello spazio: l'*Analysis situs*. Pieri ribadisce, in definitiva, che il *valore logico* della costruzione non dipende dall'origine dei postulati (o delle idee primitive) scelte, né acquisisce da essa maggiore o minore *necessità logica*:

Sostenere che i postulati della Geometria, per esempio, non sono altro che forme rigorose del concetto intuitivo dello spazio fisico (le quali non fanno altro che imprimere un certo carattere di stabilità, con un sigillo razionale, ai fatti dell'intuizione spaziale) è, a mio avviso, attribuire una portata eccessiva a una rappresentazione oggettiva, facendone una *conditio sine qua non* dell'esistenza stessa della Geometria, quando questa potrebbe benissimo sussistere anche senza

> quella. [Soutenir que les postulats de la Géométrie, par exemple, ne sont que des formes rigoureuses du concept intuitif de l'espace physique (lesquelles ne font qu'imprimer un certain caractère de stabilité, avec un cachet rationnel, aux faits de l'intuition spatiale), c'est à mon avis attribuer une portée excessive à une représentation objective, en en faisant une condition sine qua non de l'existence même de la Géométrie, tandis que celle-ci pourrait fort bien subsister encore sans celle-là]. (Pieri, 1900, p. 51)

Chi sono questi "certains"? In un discorso di qualche anno dopo, in cui riprende questo passo letteralmente (Pieri, 1906), aggiunge come inciso "come *fa p. es. il Klein*". Criticava un parere accademicamente pesante, e forse in una circostanza come l'inaugurazione dell'anno accademico di Catania si sentiva più sicuro che al congresso internazionale di Parigi di non offendere suscettibilità.

Pieri comunque osserva che sarebbe riduttivo concludere che la controversia tra realisti e nominalisti debba necessariamente terminare in favore di questi ultimi, perché la Geometria non si esaurisce nella sua costruzione logica. Si veda, a questo proposito, anche Gandon (2006). Lo stesso Hilbert nel 1894 ancora diceva:

> La Geometria è la teoria che tratta delle proprietà dello spazio (…). È basata sul più semplice esperimento possibile, vale a dire il disegno. [Geometry is the theory about the properties of space (…). It is based on the simplest experiment that can be carried out, namely drawing]. (Toepell, 1986a, p. 21)

Si potrebbe proseguire a lungo con questi esempi, ma quelli fatti finora bastano per fare una prima osservazione: nell'intreccio di opinioni e posizioni diverse, il rigore era ovviamente l'aspirazione comune di tutti i (buoni) matematici. I risultati dei lavori di assiomatizzazione erano accolti con grande entusiasmo (i congressi di Parigi, in cui Pieri prima – a quello di filosofia – e Hilbert poi – a quello di matematica – hanno esposto le loro idee sono state delle vere e proprie "vie di Damasco" per molti: fu eclatante il caso di Bertrand Russell), ma si sottolineava a ogni occasione che la geometria (e più in generale la matematica) non si esauriva nell'interpretazione formale dell'assiomatizzazione. In altri termini, i matematici – nella loro elaborazione e sistemazione della geometria – non avevano ancora rinunciato ad avere una relazione con la realtà extra-matematica (in uno dei tanti modi in cui questo termine poteva venire preso: fisica, psicologica, ...). In molti casi veniva esplicitamente evocata una *common-sense geometry*, mantenuta distinta logicamente ma presente come punto di ispirazione. La ricerca del rigore non era vista in contrapposizione con la visione della geometria come descrizione e studio delle strutture delle nostre rappresentazioni dello spazio. Per dirla con Freudenthal, il legame con la realtà non era stato ancora troncato:

> Si è discusso molto se gli assiomi derivano dall'intuizione pura (Kant) o se sono esperienza idealizzata (Helmholtz) o giudizi ipotetici sulla realtà (Riemann) o affermazioni che trascendono la realtà (Klein). In ogni caso, la geometria ha a che

> fare con lo spazio reale. [It has been controversial whether axioms derive from pure intuition (Kant) or whether they are idealised experience (Helmholtz) or hypothetical judgments about reality (Riemann) or statements transcending reality (Klein). In any case, geometry deals with real space]. (Freudenthal, 1962, p. 617)

L'origine dei postulati, la loro scelta, non è più un problema di *necessità logica*, ma rimane un problema matematico *at large*. Non solo, per molti dei protagonisti che abbiamo citato anche l'aspetto didattico deve venire esplicitamente considerato, e questa preoccupazione viene raccolta (come abbiamo visto) da matematici del calibro di Birkhoff, e poi da molti altri (Zeitler, 1990). Il fatto che questo legame con la realtà sia stato esplicitamente bruciato ha comunque anche una conseguenza per la matematica contemporanea, intrecciata con imprevedibili nuove discipline: rende più difficile culturalmente, per i matematici, lavorare sull'assiomatizzazione del senso comune, della geometria naïf, come viene richiesto dall'A.I. Recuperare questo gap culturale forse renderebbe i problemi dell'insegnamento della matematica più vicini al lavoro dei matematici professionisti.

5. I Grundlagen di Hilbert e Parigi 1900

Abbiamo più volte citato i congressi (di filosofia, di matematica, di psicologia, tutti in qualche modo collegati alla grande esposizione universale) di Parigi del 1900. L'opinione corrente tra gli storici della matematica (cfr. per esempio Freudenthal, 1962; Kennedy, 1980) è che prima di essi la fase "fondazionale" si sia svolta senza che i matematici abbiano interagito tra loro, e che Parigi sia stata una porta che si è spalancata all'improvviso. Questo è solo parzialmente vero; senz'altro gli italiani della scuola di Peano conoscevano bene anche gli scritti filosofici di Poincaré sui fondamenti. Vailati, nella sua prolusione al corso di Storia della Meccanica dell'anno 1897/98 (Vailati, 1898/1971) cita e utilizza l'articolo di Poincaré *Sur la nature du raisonnement mathématique* (Poincaré, 1894); e quando questo e altri articoli furono ripubblicati nei *libri* filosofici di Poincaré, un altro allievo di Peano, Vacca, poteva scrivere: "Eccoti un passo di un libro *bellissimo*, ma *orribilmente arretrato*, che farà rumore: H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*" (Vacca, 1902/1971, p. 431).

Da molte altre citazioni risulta che anche le riviste inglesi erano conosciute e usate abitualmente nell'ambiente torinese; e almeno da un certo momento in poi Poincaré non poteva non conoscere il lavoro della scuola di Peano. Proprio sulla *Revue de Métaphysique et de Morale*, vale a dire *chez Poincaré*, Vailati pubblicò *La Logique Mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano* (Vailati, 1899), che ha decisamente l'aspetto di un articolo di propaganda (in senso buono). La *Revue*, va inoltre ricordato, fu l'ispiratrice del primo congresso internazionale di filosofia. Pasch, inoltre, era conosciuto e apprezzato – e gli veniva riconosciuto il ruolo di precursore. I

Grundlagen di Hilbert erano noti nell'ambiente intorno a Enriques fin dalla pubblicazione (Hilbert, 1899) e usati anche prima dei congressi di Parigi. Certo, il lavoro di Russell *Foundations of Geometry* (Russell, 1897) dimostra che era completamente all'oscuro di quanto stava succedendo in Italia. E infatti Russell racconta di sé stesso (Russell, 1969) che a Parigi, dopo aver sentito la conferenza di Pieri e le altre comunicazioni della scuola di Peano (presente in massa a Parigi: Peano, Burali-Forti, Padoa, Pieri, Vailati, Vacca), e aver conosciuto Peano, fece incetta di *reprints* per studiarli e partì senza neanche fermarsi al congresso internazionale di matematica (notiamo però che A. N. Whitehead vi rimase). Un effetto analogo ebbe per Louis Couturat l'incontro con Vacca. A scopo aneddotico, ricordiamo che Peano portava sempre con sé e distribuiva ovunque copie del proprio *Formulario* e degli altri lavori della sua scuola.

Anche Hilbert ebbe delle sorprese, in effetti: Padoa presentò una comunicazione sulle definizioni nella geometria euclidea che, assieme ai lavori di Pieri su cui era basata la precedente comunicazione al congresso di filosofia, aveva un'intersezione notevole con i *Grundlagen* (e per certi versi una cura del rigore forse maggiore). Per una descrizione dettagliata dei lavori dei congressi, si veda Kennedy (1980).

È indubbio comunque che questi congressi furono un punto di svolta: tutti vennero a conoscenza di tutto (o quasi). Un'interessante conseguenza "accademica" del congresso fu che il tema dei "fondamenti della geometria", da argomento di speculazione filosofica per matematici maturi, incomincia a diventare argomento di tesi per giovani brillanti matematici: abbiamo già citato Brouwer, ma anche Friedrich Riesz scrive *A térfogalom genezise*, (Riesz, 1906), sotto l'influenza de *La science et l'hypothèse* di *Poincaré* (Poincaré, 1902b).

Poincaré raccoglie i propri saggi filosofici in una serie di libri (Nabonnand, 2006), che diventano subito *bestseller*; inizia a sistematizzare lo studio qualitativo dello spazio con l'*Analysis situs* (nel 1901), senza peraltro curarsi di darne un'assiomatizzazione. I *Grundlagen* di Hilbert si diffondono fulmineamente e vengono ristampati e tradotti in francese e inglese. Russell scrive i *Principles*, sembra quasi di vedere, sotto lo choc di Parigi. L'influenza di Hilbert è cruciale nel far affermare il paradigma formalista; una frase di Poincaré (la chiusura del suo commento ai *Grundlagen*) fa capire la paura che questo atteggiamento potesse finire per totalizzare la geometria:

> Pare che gli interessi solo il punto di vista logico. Data una serie di proposizioni, verifica che tutte si deducono logicamente dalla prima. Qual è il fondamento di questa prima proposizione, quale ne è l'origine psicologica? Non se ne occupa (…) La sua opera è dunque incompleta, ma questa non è una critica che gli faccio. Incompleti, bisogna pure rassegnarsi a esserlo. Basta che abbia fatto fare alla filosofia della Matematica un progresso notevole, comparabile a quelli che erano dovuti a Lobatchevski, a Riemann, a Helmholtz e a Lie. [Le point de vue

> logique paraît seul l'intéresser. Étant donné une suite de propositions, il constate que toutes se déduisent logiquement de la première. Quel est le fondement de cette première proposition, quelle en est l'origine psychologique? Il ne s'en occupe pas (…) Son œuvre est donc incomplète, mais ce n'est pas une critique que je lui adresse. Incomplet, il faut bien se résigner à l'être. Il suffit qu'il ait fait faire à la philosophie des Mathématiques un progrès considérable, comparable à ceux que l'on devait à Lobatchevski, à Riemann, à Helmholtz et à Lie]. (Poincaré, 1902a, p. 263)

Tutto questo passo andrebbe letto e pesato parola per parola …

I rischi che un atteggiamento ciecamente formalista poteva avere, se adottato in maniera totalizzante da matematici non della statura di un Hilbert, erano alla base anche dei "timori" di Enriques di cui parla Antonio Santucci: "il timore di Enriques era che stesse per nascere una nuova scolastica" (Santucci, 1989, p. 109).

6. Federigo Enriques

Dopo Parigi, infatti, Federigo Enriques scrive il suo saggio *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Enriques, 1901). L'atteggiamento di Enriques è chiaro. In questo saggio non cerca le ragioni dei postulati nella struttura del mondo esterno, ma sposta il discorso dell'evidenza su un altro piano: cerca di trovarla nella formazione della rappresentazione mentale come derivata dalla percezione. A suo modo, il suo guardare alla percezione attraverso i dati offerti dalla psicofisiologia di Wundt è un estremo tentativo di salvare il carattere "realistico" della geometria. Vailati lo mette in guardia dal "prendere troppo sul serio" la psicofisiologia:

> Lessi l'articolo dell'Enriques, ricavandone impressione non molto diversa dalla tua. Tempo fa egli mi scrisse, esprimendomi desiderio che *annodassimo* una corrispondenza filosofica e così infatti facemmo scambiandoci tre o quattro lettere. Nell'ultima non gli ho nascosto il mio apprezzamento sul genere di "filosofia" a cui il suo articolo è informato e rimproverandogli anche di prendere troppo sul serio la *psicofisiologia*. (Vailati, 1901/1971, p. 341)

Enriques è in realtà lontano dallo "psicologismo spinto" che talvolta gli viene attribuito; cercava di essere un realista/razionalista di buon senso, e il logicismo spinto gli appariva palesemente privo di buon senso. Si veda a questo proposito anche la sua garbata polemica con Peano a proposito della distinzione tra appartenenza e inclusione di un elemento rispetto a un insieme. Il problema, per Enriques, è in sintesi il seguente:

> Desumere i concetti spaziali, che cadono sotto l'intuizione esatta del matematico, dalle rappresentazioni sensibili di cui la psicologia fisiologica mostra la genesi. Spiegare i postulati della Geometria che così viene subiettivamente costruita, riattaccandone la necessità alla struttura logica del pensiero. (Enriques, 1901, p. 174)

Il programma è ambizioso, pensando che Enriques non si limitava alla geometria euclidea, ma pensava anche alla proiettiva e alla differenziale. Ma per lui questo tema era talmente importante, da fargli scrivere, nella prefazione ai *Problemi della Scienza* (in cui riprende letteralmente molti passaggi del saggio della *Rivista Filosofica*):

> La fede in questa filosofia scientifica ci ha tratto dai campi della Geometria, ove il pensiero riposa tranquillo nella sicurezza degli acquisti, a discutere sulla preparazione di una scienza gnoseologica che possa divenire oggetto d'intesa degli studiosi, e che porti ad unificare i vari domini del sapere in una veduta sintetica del procedimento conoscitivo. (Enriques, 1906, p. 5)

Dunque un intento essenzialmente *cognitivo*, come si dice oggi.

Entrando nel dettaglio, è cruciale per Enriques il fatto che l'esperienza ripetuta *non è sufficiente* di per sé a far nascere il sentimento di *necessità psicologica* che accompagna i postulati della geometria (ad esempio, la caduta dei gravi, anche se continuamente verificata nell'esperienza, non viene ad acquisire carattere di necessità psicologica: e infatti possiamo senza problemi immaginare di volare, ma non riusciamo a immaginare due diverse linee rette che congiungano due punti); l'empirismo in sé non è sufficiente a spiegarli:

> La ricerca fisio-psicologica tendente a mostrare l'acquisto delle rappresentazioni spaziali per via delle sensazioni deve essere completata da una nuova ricerca, più propriamente psicologica, la quale mostri come dalle rappresentazioni menzionate si formino i concetti a cui i postulati si riferiscono; e scopra le condizioni necessarie, dipendenti dalla struttura psichica, che alla suddetta formazione presiedono. Si tratta insomma di derivare il concetto matematico dello spazio dalle rappresentazioni spaziali che le sensazioni hanno tratto dal mondo esterno. (Enriques, 1906, p. 21)

Vediamo chiaramente qui un superamento delle posizioni di Helmholtz.

Oggi questo atteggiamento può sembrare ingenuo, e sicuramente tutto ciò che ha a che fare con la psicofisiologia *à la* Wundt appare superato perché tale psicofisiologia si è dimostrata molto debole. Lo stesso Enriques arriva d'altra parte a scoprire molti limiti nel lavoro di Wundt. Nell'atteggiamento di Enriques c'è però un dato molto interessante: è la matematica che aiuta a comprendere i meccanismi della rappresentazione; il processo psicologico da comprendere è proprio quello che porta alla formazione dei concetti "che cadono sotto l'intuizione geometrica del matematico". Al movimento formalista Enriques opponeva una proposta che non si basava fideisticamente sui dati psicofisiologici ma cercava una risposta che scaturiva dalla logica *interna* del pensiero matematico.

Alla radice dei processi c'è il concetto di punto, visivo e tattile, e dalla associazione di queste due immagini nasce l'immagine del punto *fisico*. Il meccanismo stesso della percezione dunque, secondo le visioni dell'epoca, si svolge in modo puntuale: Enriques esplicitamente si richiama alla teoria dei *segni locali* di Lotze. Ma le sensazioni di natura diversa hanno un legame con la pratica matematica: lo sviluppo stesso della ricerca in geometria è riallacciato ai gruppi di sensazioni:

> I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base della teoria del continuo (*Analysis situs*), della Geometria metrica (o metrica-differenziale) e della proiettiva si possono riattaccare nella psicogenesi a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista. (Enriques, 1906, p. 29)

All'origine di questa distinzione c'erano le vedute di Klein (Klein, 1890), come Enriques stesso riconosce, e una visione quasi "fisiologista" del concetto di varietà, con l'aspetto "locale" associato alle percezioni tattili e quello "globale" associato alle percezioni visive: tutto lo scritto di Enriques cerca di descrivere il processo di associazione di questi due gruppi di sensazioni.

L'analisi di Enriques si concentra quindi su come si costruisce l'immagine concettuale della retta (unendo la rappresentazione genetica data dal movimento di un punto con quella attuale), sulla tridimensionalità, sul concetto di linea continua e di superficie, sulla continuità in generale. La sua tesi è che "i postulati che stanno alla base della teoria del continuo costituiscono condizioni per la possibilità di unire associativamente, nei concetti della linea e della superficie, le varie rappresentazioni genetiche ed attuali che vi si collegano" (Enriques, 1901, p. 189).

Analogo è il processo per la geometria proiettiva: "i postulati propri della Geometria proiettiva vengono riconosciuti come condizioni per l'associazione di certe rappresentazioni visive, da cui hanno origine i concetti astratti della retta e del piano" (Enriques, 1901, p. 192).

E così anche per la geometria metrica e il concetto di congruenza. La spiegazione finale è per il postulato delle parallele, che viene riguardato come avente "minore evidenza":

> L'associazione tattile-visiva, la quale porta ad unificare la Geometria metrica e la Geometria proiettiva dello spazio in un sistema metrico-proiettivo, determina anche (unendo insieme due rappresentazioni delle parallele) la natura euclidea del sistema stesso; porta cioè a spiegare la necessità subiettiva del postulato delle parallele, che pure, fisicamente riguardato, è, tra tutti i principi della Geometria, il meno sicuro. (Enriques, 1901, p. 187)

La grandezza di Enriques come matematico (e anche, pur con tutti i suoi limiti, come storico e filosofo della scienza) non ci permette di liquidare come *ingenuità* questo lavoro. Da un lato, come abbiamo detto, c'era sicuramente il tentativo di rivendicare un carattere "realistico" (almeno sul piano psicologico) alla geometria, e a salvarne la natura di "scienza dello spazio", almeno sotto la forma di "scienza delle rappresentazioni concettuali dello spazio". Inoltre, il processo di analisi che compie – percezione, rappresentazione, strutturazione concettuale, riordinamento della percezione – è estremamente attuale, almeno per quanto riguarda le ricerche di psicologia della matematica.

La debolezza oggettiva del tentativo di Enriques non sta nel suo indulgere allo “psicofisiologismo”. Si tratta di una immaturità strutturale di tutta la cultura scientifica dell’epoca: ancora totalmente positivista/quantitativa, non era in grado di descrivere “scientificamente” fenomeni di tipo essenzialmente qualitativo come quelli che Enriques affrontava. Tanto per sottolineare un aspetto di questa inadeguatezza, tutta la sua costruzione è basata

- su una matematica,
- su una psicologia,
- su una fisiologia,

di tipo *puntuale*. Infatti, la matematica era ancora esclusivamente fatta di punti (che essi rappresentassero punti dello spazio o numeri su una retta); abbiamo visto anche come Pieri indicasse nel punto il substrato di ogni costruzione geometrica. La psicologia a cui Enriques fa riferimento ammetteva la costruzione “puntuale” (in un senso non molto chiaro) delle rappresentazioni mentali, e la fisiologia della percezione di Wundt (e la versione filosofica di Lotze) era essenzialmente basata su un concetto “puntuale” della percezione (tattile o visiva).

Nel giro di qualche decennio la matematica, con gli sviluppi della topologia, avrebbe iniziato a emanciparsi da questa visione; dopo poco tempo la *Gestalt* avrebbe affermato una psicologia “globale” della visione e la fisiologia avrebbe sviluppato col tempo una concezione dell’elaborazione della percezione (ad esempio visiva) che fin dai primi stadi non è più retinico/puntuale: non si accetta più oggi una corrispondenza biiettiva puntuale spazio esterno-immagine.

7. Le conseguenze

Un tentativo filosofico di trovare le radici della “verità geometrica” è fatto, dopo qualche anno, da Brunschvicg (1911); lo ricordiamo perché ritrova alla base di questa “verità” *intesa in senso psicologico* la pratica del disegno, ricollegandosi così al primo Hilbert. Ma anche questo rimane un momento isolato, e la spinta della ricerca delle radici della geometria e dei suoi legami con la realtà sostanzialmente si esaurisce, anche se ebbe alcuni continuatori come Nicod e Gonseth. Questo fatto ebbe notevoli conseguenze culturali.

Sull’altro grande filone “universale” tradizionalmente considerato un *apriori* matematico, il concetto di numero naturale, una volta terminata la fase dell’assiomatizzazione, la ricerca si espande (con risultati ricchissimi) nelle più svariate direzioni: basti citare la psicologia infantile, la didattica e l’apprendimento, l’antropologia, l’archeologia, l’etnolinguistica. Nei primi trent’anni del secolo viene esaminato in modo nuovo il materiale etnografico raccolto nei secoli precedenti per capire in quale modo prende forma il concetto di numero nelle “società inferiori”; la formazione del concetto di numero nei bambini diventa uno dei punti chiave di tutti gli studi di psicologia infantile; il materiale archeologico relativo ai conteggi e alle prime rudimentali operazioni diventa spunto per riflessioni sulla natura dell’intuizione del numero, e gli esempi potrebbero continuare.

Confrontata con questa, la situazione della geometria è desolante. Le ricerche sulla percezione dello spazio prendono una via completamente indipendente, in cui l’interazione dei matematici (e della matematica) è nulla. Basti pensare, ad esempio, che in un’opera tipica (e fondazionale) come *Gestalt Psychology* di Köhler (1947) non è citato *nessun* matematico (Helmholtz viene citato come fisiologo).

I lavori di Piaget (allievo di Brunschvicg, va ricordato) sul concetto di numero precedono di vari anni quelli sulla geometria (Piaget & Inhelder, 1947), e soprattutto si basano su materiale molto più abbondante esistente negli annali di psicologia. Notiamo, *en passant*, che Piaget ribatteva a Enriques come l’origine delle nozioni proiettive comprenda un processo di coordinamento ben più complesso che non il prendere semplicemente coscienza del dato percettivo della visione. Per la geometria, non esiste nulla di analogo al lavoro di Dantzig sul concetto di numero; Levy-Bruhl quasi non parla di spazio e rappresentazioni spaziali nei suoi libri sulle mentalità primitive (mentre invece dedica ampio spazio ai conteggi e alle operazioni); Cajori nella sua storia della simbologia matematica dedica alla simbologia spaziale e geometrica solo il 5% del suo trattato. È quindi evidente che, dopo la crisi dei fondamenti, per almeno 40 anni le relazioni della geometria con le altre scienze “cognitive” sono rimaste congelate. È difficile non vedere questo come una conseguenza dell’egemonia del modello hilbertiano, assorbito poi dalla mentalità “bourbakista” tuttora dominante – almeno ufficialmente – nella maggior parte dei matematici. E la difficoltà è di tipo profondo e ormai costituzionale nel matematico medio, soprattutto ora che allo studio della geometria si arriva attraverso l’algebra lineare. Perché, come dice René Thom, gli oggetti algebrici sono troppo poveri semanticamente per farsi capire in modo diretto come una figura spaziale (Thom, 1973).

Vorremmo sottolineare, in conclusione, che questo dibattito fu avviato, soprattutto, dalle ricerche nel campo della percezione. Le sue conseguenze nel settore dell’insegnamento della matematica sono state dirette, attraverso l’opera di Klein, Enriques, Vailati e molti altri; e indirette, grazie all’esplicita influenza che Poincaré e altri hanno avuto su Piaget. A partire da quel momento, i matematici hanno preso coscienza del fatto che la trasmissione della disciplina non può prescindere dai meccanismi specifici di scoperta e costruzione dei concetti matematici.

Ora, in un nuovo secolo, la nostra conoscenza dei meccanismi della percezione è cambiata radicalmente; i lavori dei neurofisiologi offrono ai geometri di oggi nuove opportunità, analoghe, come portata, a quelle di un secolo fa. Probabilmente c’è bisogno di nuovo di una discussione sulla relazione tra percezione, genesi psicologica delle nozioni matematiche, e corpus delle conoscenze geometriche *stricto sensu* – discussione che coinvolga anche settori della conoscenza che un secolo fa ancora non esistevano. Una discussione che non alimenti facili entusiasmi o sensazionalismi, ma che porti a un nuovo approccio al legame tra la geometria e la realtà, che la scienza e la tecnica ci fanno vivere in modo sconvolgentemente nuovo. Quale geometria dobbiamo "insegnare" a un robot? Quale geometria può "apprendere" una macchina? C'è un legame tra questa e quella che insegniamo nelle scuole?

Riferimenti bibliografici

Amendola, G. (1906). Lettera a Giovanni Vailati, 7 novembre 1906. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractors). *Annals of Mathematics, 33*, 329–345.

Birkhoff, G. D., & Beatley, R. (1940). *Basic geometry*. Chicago: Scott, Foresman and Company.

Bolondi, G. (2000). Vi ingannate, signor Poincaré! *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, *69,* 39–50.

Bolondi, G. (2015). Epistemology and didactics in Federigo Enriques. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 21–33). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*.

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Marseille: Cahiers du Sud.

Brentano, F. (1900). Lettera a Giovanni Vailati, 24 marzo 1900. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Brouwer, L. E. J. (1909). *Het Wezen der Meetkunde.* [Ripubblicato come Brouwer, L. E. J. (1975), The nature of geometry. In A. Heyting (Ed.), *L. E. J. Brouwer Collected works*. Amsterdam: North-Holland].

Brunschvicg, L. (1911). *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris: Blanchard.

Castelnuovo, G. (1947). Commemorazione di Federigo Enriques. *Periodico di Matematiche, 25*(4)*,*81–94.

Ciliberto, M. (1982). Scienza, filosofia e politica: Federigo Enriques e il neoidealismo italiano. In O. Pompeo Faracovi (Ed.), *Federigo Enriques: Approssimazione e verità* (pp. 131–166). Livorno: Belforte.

Diamond, S. (1976). Wundt. In *Dictionary of Scientific Biographies* (Vol. 14). New York: Scribners.

Enriques, F. (1901). Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria. *Rivista Filosofica*, *4*(3), 171–195.

Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Bologna: Zanichelli.

Enriques, F. (1911). Principes de la géométrie. In J. Molk (Ed.), *Encyclopédie des Sciences Mathèmatiques,* (Vol. 3, pp.1–147). Paris: Gauthier-Villars.

Freudenthal, H. (1957). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5*, 105–142.

Freudenthal, H. (1962). The main trends in the foundations of geometry in the 19th century. In E. Nagel, P. Suppes, & A. Tarski (Eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. *Proceedings of the 1960 International Congress* (613–621). Stanford: Stanford University Press.

Gandon, S. (2006). La réception des Vorlesungen über neuere Geometrie de Pasch par Peano. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *12*(2), 249–290.

Helmholtz, H. V. (1868). Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, *9*, 193–221.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner-Verlag.

Israel, G. (1989). Federigo Enriques: A psychologistic approach for the working mathematician. In M. A. Notturno (Ed.), *Perspective in Psychologism,* (pp. 426–457). Leiden: Brill.

Jammer, M. (1961). *History of the concept of space*. New York: Dover.

Kennedy, H. (1980). *Peano.* Dordrecht: Reidel.

Klein, F. (1890). Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. *Mathematische Annalen, 37*, 544–572.

Köhler, W. (1947). *Gestalt Psychology.* New York: Livering.

Mach, E. (1886). *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*. Jena: Fischer.

Nabonnand, P. (2006). La genèse psycho-physiologique de la géométrie selon Poincaré. Conférence donnée au colloque "Inventer l'espace". Paris: Maison des Sciences de l'Homme.

Nowak, G. (1989). Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry. In D. E. Rowe & J. Mc Cleary (Eds.), *The History of Modern Mathematics: Ideas and their Reception*, *Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics* (pp. 17–46). Cambridge: Academic Press.

Pasch, M. (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig: Teubner.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Paris: PUF.

Pieri, M. (1900). Sur la géométrie envisagée comme une système purement logique. In *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie: Logique et histoire des sciences,* (Vol. 3, pp. 367–404). Paris: Colin.

Pieri, M. (1906). Uno sguardo al nuovo indirizzo logico-matematico delle scienze deduttive. *Annuario della Università di Catania*, *1906–1907*, 21–82.

Poggi, S. (1989). Storia naturale della conoscenza ed economia del pensiero: la psicologia contemporanea e i "Problemi della scienza" di F. Enriques. In R. Simili (Ed.), *Federigo Enriques filosofo e scienziato* (pp. 143–157). Bologna: Cappelli.

Poincaré, H. (1889). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, *1*, 157–162.

Poincaré, H. (1894). Sur la nature du raisonnement mathématique. *Revue de Métaphysique et de Morale, 2*, 371–384.

Poincaré, H. (1902a). Les fondements de la géométrie. *Bulletin des Sciences Mathématiques, 26*, 249–272.

Poincaré, H. (1902b). *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion.

Riemann, B. (1854). *Über die Hypothesen Welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationsschrift, Göttingen 1854)*. [Pubblicato come: Riemann, B. (1868). Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abh. Ges. Gstt*, *13*.] [ripubblicato in Riemann, B. (1876). *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*. Leipzig: Teubner].

Riesz, F. (1906). A térfogalom *genezise*. *Math. és Phys. Lapok*, 15*,* 97–122.

Russell, B. (1897). *An essay on the foundations of geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, B. (1969). *The autobiography of Bertrand Russell.* London: George Allen & Unwin.

Santucci, A. (1989). Enriques e la crisi del positivismo. In R. Simili (Ed.), *Federigo Enriques Filosofo e Scienziato* (pp. 91–125). Bologna: Cappelli.

Scholz, E. (1982). Herbart's influence on Bernhard Riemann. *Historia Mathematica, 9*(4), 413–440.

Steila, D. (1966). *Scienza e rivoluzione*. Firenze: Vallecchi.

Tazzioli, R. (1994). *Il problema di Riemann-Helmholtz-Lie: "Ipotesi", "fatti" e "gruppi di trasformazione". Seminari di Geometria dell'Università di Bologna (1991–1993)*, 249–270.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education* (pp.194–209). Cambridge: Cambridge University Press.

Toepell, M. (1986a). *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie".* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Toepell, M. (1986b). On the origins of David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Archive for History of Exact Sciences*, *35*(4)*,* 329–344.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: Reidel.

Vacca, G. (1902). Lettera a Giovanni Vailati, 8 novembre 1902. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Vailati, G. (1896a). Lettera a Giulio Cesare Ferrari, 17 settembre 1896. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Vailati, G. (1896b). Lettera a Giulio Cesare Ferrari, 25 ottobre 1896. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Vailati, G. (1898). *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca.* Torino: Roux Frassati.

Vailati, G. (1899). La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. J. Peano. *Revue de Métaphysique et de Morale T. 7*(1), 86–102.

Vailati, G. (1900). Lettera a Franz Brentano, 27 marzo 1900. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Vailati, G. (1901). Lettera a Giovanni Vacca, 25 maggio 1901. In G. Lanaro (1971) (Ed.), *Giovanni Vailati, Epistolario 1891–1909*. Torino: Einaudi.

Zeitler, H. (1990). Axiomatics of geometry in school and in science. *For the Learning of Mathematics, 10*(2), 17–24.